§ 25. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ПРОИЗВОДНЫХ

25.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение.

Теорема 25.1 (Ролль). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a)=f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c)=0$.

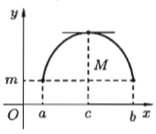

Рис. 139

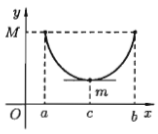

Рис. 140

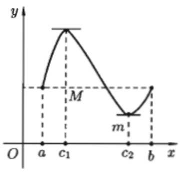

Рис. 141

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y=f(x)$ найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox (см. рис. 139 и 140). На рисунке 141 таких точек две.

Теорема 25.2 (Коши). Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема 25.3 (Лагранж). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что выполняется равенство

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \tag{25.2}$$

25.3. Возрастание и убывание функций

Одним из приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графика функции.

Установим необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема 25.6 (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) для $\forall x \in (a;b)$.

Теорема 25.7 (достаточные условия). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для $\forall x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

❏ Пусть $f'(x)>0$. Возьмем точки x_1 и x_2 из интервала $(a;b)$, причем $x_1<x_2$. Применим к отрезку $[x_1;x_2]$ теорему Лагранжа: $f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)$, где $c \in (x_1;x_2)$. По условию $f'(c)>0$, $x_2-x_1>0$. Следовательно, $f(x_2)-f(x_1)>0$ или $f(x_2)>f(x_1)$, т. е. функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ возрастает. ■

Рассмотренные теоремы 25.6 и 25.7 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность. *Напомним*, что функция возрастающая или убывающая называется *монотонной* (см. с. 122).

Пример 25.8. Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x-4$ на возрастание и убывание.

❍ Решение: Функция определена на $\mathbb{R}=(-\infty;\infty)$. Ее производная равна:

$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1);$$
$$f'(x)>0 \quad \text{при} \quad x\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty);$$
$$f'(x)<0 \quad \text{при} \quad x\in(-1;1).$$

Ответ: данная функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;\infty)$; убывает на интервале $(-1;1)$. ●

25.4. Максимум и минимум функций

Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

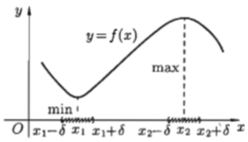

Рис. 146

Аналогично определяется точка минимума функции: x_0 — ***точка минимума*** функции, если $\exists\delta > 0$ $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > f(x_0)$. На рисунке 146 x_1 — точка минимума, а точка x_2 — точка максимума функции $y = f(x)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется ***максимумом*** (***минимумом***) функции. Максимум (минимум) функции называется ***экстремумом*** функции.

Понятие экстремума всегда связано с определенной окрестностью точки из области определения функции. Поэтому функция может иметь экстремум лишь *во внутренних точках* области определения. Рассмотрим условия существования экстремума функции.

> **Теорема 25.8 (необходимое условие экстремума).** Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

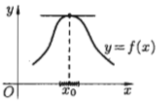

Рис. 147

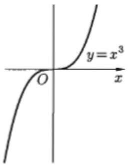

Рис. 148

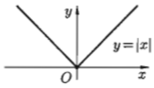

Рис. 149

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ производной не имеет, но точка $x = 0$ — точка минимума (см. рис. 149).

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими***.

> **Теорема 25.9 (достаточное условие экстремума).** Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) *производная* $f'(x)$ *меняет знак* с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.

Пример 25.9. Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение: Очевидно, $D(y) = \mathbb{R}$. Находим $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$, т. е. $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$.

Производная не существует при $x_1 = 0$ и равна нулю при $x_2 = 8$. Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала $(-\infty; 0)$, $(0; 8)$, $(8; \infty)$. Отметим на рисунке 151 знаки производной слева и справа от каждой из критических точек.

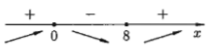

Рис. 151

Следовательно, $x_1 = 0$ — точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 0$, и $x_2 = 8$ — точка минимума, $y_{\min} = y(8) = -\frac{4}{3}$.

25.6. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вниз*** на интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх*** на интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба*.

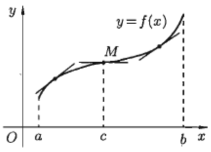

Рис. 154

На рисунке 154 кривая $y = f(x)$ выпукла вверх в интервале $(a; c)$, выпукла вниз в интервале $(c; b)$, точка $M(c; f(c))$ — точка перегиба.

Интервалы выпуклости вниз и вверх находят с помощью следующей теоремы.

> **Теорема 25.11.** Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$ имеет отрицательную вторую производную, т. е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a; b)$ — график выпуклый вниз.

Пример 25.12. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

❍ Решение: Находим, что $y' = 5x^4 - 1$, $y'' = 20x^3$. Вторая производная существует на всей числовой оси; $y'' = 0$ при $x = 0$.

Отмечаем, что $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty; 0)$ — выпуклый вверх, в интервале $(0; \infty)$ — выпуклый вниз. Точка $(0; 5)$ есть точка перегиба. ●

25.7. Асимптоты графика функции

Построение графика функции значительно облегчается, если знать его асимптоты. Понятие асимптоты рассматривалось при изучении формы гиперболы (см. с. 81).

Напомним, что *асимптотой* кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой (рис. 156).

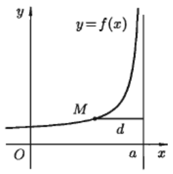

Рис. 156

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$.

Действительно, в этом случае непосредственно из рисунка 156 видно, что расстояние точки $M(x; y)$ кривой от прямой $x = a$ равно $d = |x - a|$. Если $x \to a$, то $d \to 0$. Согласно определению асимптоты, прямая $x = a$ является асимптотой кривой $y = f(x)$. Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения x, вблизи которых функция $f(x)$ неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва второго рода.

Например, кривая $y = \dfrac{2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту (см. рис. 157) $x = -1$, так как $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{2}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{2}{x+1} = -\infty$.

Уравнение *наклонной асимптоты* будем искать в виде

$$y = kx + b. \tag{25.5}$$

Найдем k и b.

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x}.} \tag{25.7}$$

Из условия (25.6) находим b:

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty} (y - kx).} \tag{25.8}$$

Итак, если существует наклонная асимптота $y = kx + b$, то k и b находятся по формулам (25.7) и (25.8).

Верно и обратное утверждение: если существуют конечные пределы (25.7) и (25.8), то прямая (25.5) является наклонной асимптотой.

Если хотя бы один из пределов (25.7) или (25.8) не существует или равен бесконечности, то кривая $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если $k = 0$, то $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Поэтому $y = b$ — уравнение *горизонтальной асимптоты*.

Замечание: Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (25.7) и (25.8) следует отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

Пример 25.13. Найти асимптоты графика функции $y = xe^x$.

❍ Решение: Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, то график функции при $x \to +\infty$ наклонной асимптоты не имеет.

При $x \to -\infty$ справедливы соотношения

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (xe^x - 0x) = \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$. ●

25.8. Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.

2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).

4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

5. Найти асимптоты графика функции.

6. Найти интервалы монотонности функции.

7. Найти экстремумы функции.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции. Заметим, что приведенная схема исследования не является обязательной. В более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций, например 1, 2, 7. Если же график функции не совсем понятен и после выполнения всех восьми операций, то можно дополнительно исследовать функцию на периодичность, построить дополнительно несколько точек графика, выявить другие особенности функции. Иногда целесообразно выполнение операций исследования сопровождать постепенным построением графика функции.

Пример 25.14. Исследовать функцию $y = \frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

○ Решение: Выполним все восемь операций предложенной выше схемы исследования.

1. Функция не определена при $x = 1$ и $x = -1$. Область ее определения состоит из трех интервалов $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$, а график из трех ветвей.

2. Если $x = 0$, то $y = 0$. График пересекает ось Oy в точке $O(0; 0)$; если $y = 0$, то $x = 0$. График пересекает ось Ox в точке $O(0; 0)$.

3. Функция знакоположительна ($y > 0$) в интервалах $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$; знакоотрицательна — в $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.

4. Функция $y = \frac{x}{1-x^2}$ является нечетной, т. к.

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geqslant 0$.

5. Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

($k = 0$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$),

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1-x^2} - 0x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение $y = 0$. Прямая $y = 0$ является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

6. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},$$

то $y' > 0$ в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

7. Исследуем функцию на экстремум. Так как $y' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$, то критическими точками являются точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ (y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

8. Исследуем функцию на выпуклость. Находим y'':

$$y''=\left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{2x(1-x^2)^2-(x^2+1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

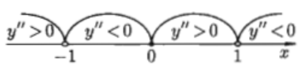

Рис. 159

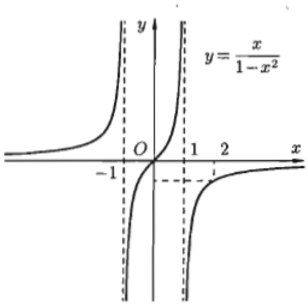

Рис. 160

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. На рисунке 159 представлена схема изменения знаков второй производной исследуемой функции.

Точка $O(0,0)$ — точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$.

График функции изображен на рисунке 160. ●